

A KÖR KERÜLETE ÉS TERÜLETE

ELMÉLET

Bizonyítható, hogy a kör kerületének és átmérőjének hányadosa állandó, azaz a kör kerülete és átmérője között egyenes arányosság van. Az arányszámot – a XVIII. század óta, Euler jelölése alapján – a görög perimetrosz, periféria (kerület) szavak kezdőbetűje miatt a görög π betűvel jelöljük.

A **kör kerülete** a kör átmérőjének π -szerese, vagyis ha a kör átmérőjét d -vel, sugarát r -rel, kerületét pedig K -val jelöljük, akkor $K = d\pi$, másképp $K = 2r\pi$.

A π irracionális szám, tehát végtelen nem szakaszos tizedestört.

Számolási feladatok esetén használhatjuk a számológépben található π értéket, vagy számolhatunk a 3,14 két tizedesjegyre kerekített értékkel. Megadhatjuk a választ π többszörösekként is, pl. egy 3,2 méter sugarú kör kerülete $6,4\pi$ méter.

Szabályos sokszögnek nevezzük azokat a sokszögeket, amelyeknek minden oldala egyenlő hosszú és minden szöge egyenlő nagyságú. Mint minden n oldalú sokszögnek, a szabályos sokszögnek is n csúcsa, n belső szöge, n külső szöge van, ahol $n \in \mathbb{N}$; $3 \leq n$ lehet.

Észrevehetjük, hogy a beírt szabályos sokszög oldalszámának növelése során egyre nagyobb lesz a beírt sokszög területe. A sokszög területe ugyanakkor nem haladhatja meg a **kör területének** nagyságát, mivel a sokszöget teljes terjedelmében tartalmazza a kör.

Minél jobban megnöveljük a beírt szabályos sokszög oldalainak számát, a sokszög területe annál inkább megközelíti a kör területének értékét.

A számolások alapján látható, hogy $\frac{T_{\text{nagy oldalszámú szabályos sokszög}}}{r^2} \approx \frac{T_{\text{kör}}}{r^2} \approx 3,14$.

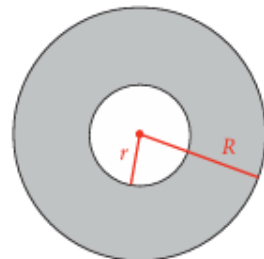
Bizonyítható, hogy a kör területének és sugara négyzetének hányadosa állandó, és az arányossági tényező π .

Az r sugarú kör területe $T = r^2\pi$ összefüggéssel számolható.

ELMÉLET

Két koncentrikus körvonal által határolt síkidom a **körgyűrű**.

Ha a körök sugara r és R , ahol $r < R$, akkor a körgyűrű területe $T = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$.



FELADATOK

BEVEZETŐ FELADAT:

- 1.** Határozd meg méréssel kör alakú tárgyak átmérőjének és kerületének hosszát! A kerület meghatározásához használj cérnát vagy madzagot, majd mérd meg a hosszát vonalzóval!

Megoldás

A táblázat néhány tárgyra vonatkozó mérési adatot tartalmaz:

Határozd meg az általad mért adatok esetében is a kerület és az átmérő hányadosának értékét!

Azt tapasztaljuk, hogy a kör alakú tárgyak kerületének és átmérőjének hányadosa a mérési hibáktól eltekintve minden esetben egy 3-nál nagyobb, 3,2-nél kisebb valós számként adódik.

	átmérő (cm)	kerület (cm)	a kerület és az átmérő hányadosa
biciklikerek-felni	62	198	3,19
8 személyes étkezőasztal	172	539,5	3,14
fürdőszobaszőnyeg	140	435	3,11
arctisztító korong	7,5	23,5	3,13
focipálya-kezdőkör	1830	5749	3,14

$$K = d\pi, \text{ másképp } K = 2r\pi.$$

2. Szerkessz három darab 5 cm sugarú kört!

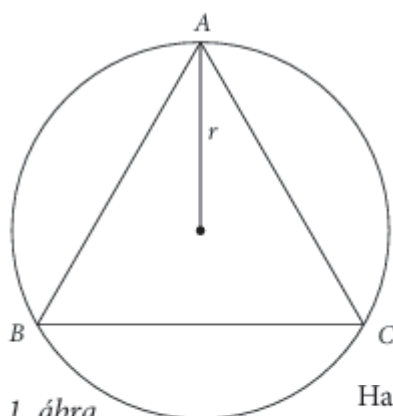


Szerkessz rendre a körökbe szabályos háromszöget, szabályos négyszöget, szabályos hatszöget!

Határozd meg méréssel a körökbe írt szabályos sokszögek oldalainak hosszát!

Számítsd ki a mérés alapján a szabályos sokszögek területét, majd határozd meg a területek és a sugár négyzetének hányadosát!

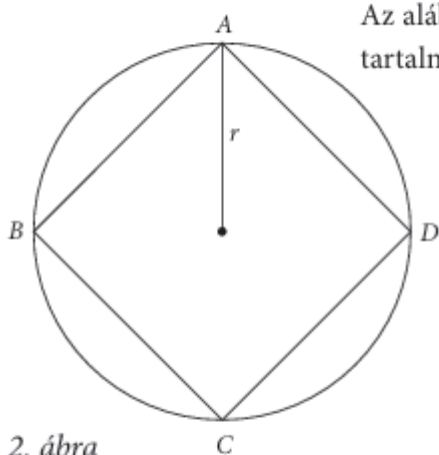
Ellenőrizd a kapott eredményeket az alábbi táblázat alapján!



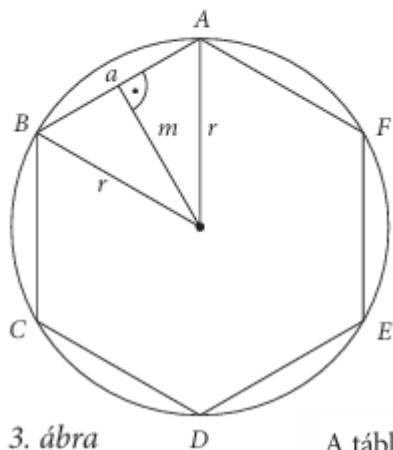
1. ábra

Ha a körökbe újabb szabályos sokszögeket írunk, akkor az oldalak számának függvénye lesz az oldalhossz és a terület.

Az alábbi táblázat az 5 cm sugarú körbe írható néhány szabályos sokszög bizonyos adatait tartalmazza kerekítve.



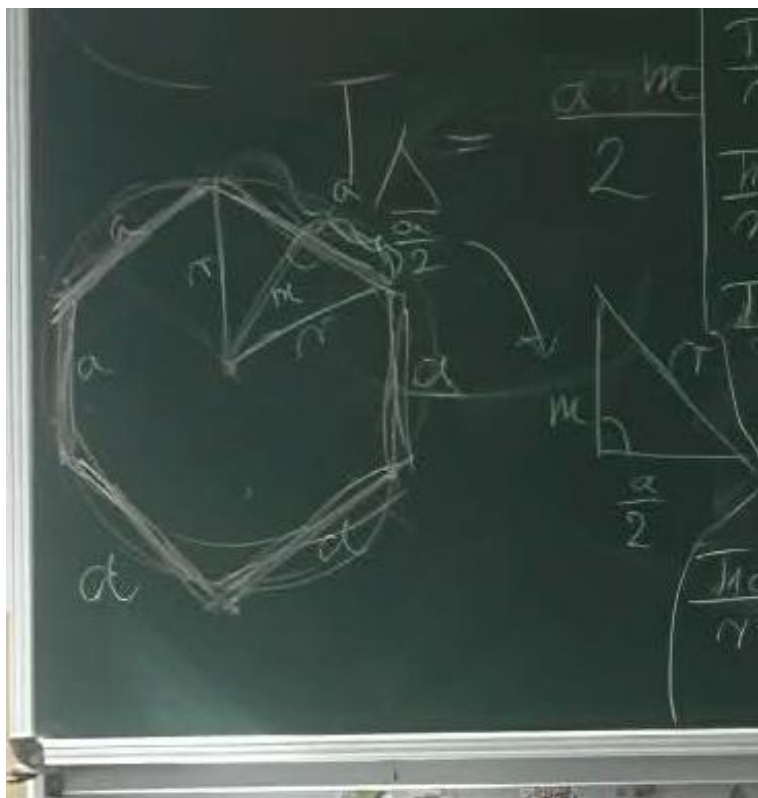
2. ábra



3. ábra

A táblázatba írt értékeket a háromszögre, a négyszögre és a hatszögre ellenőrizd számolással is! A szabályos hatszög területét úgy határozhatod meg, hogy a 3. ábrán lévő a alapú, m magasságú háromszög területét hatszorozod. (Hasonlóan járhatunk el minden szabályos sokszög esetén.)

a sokszög oldalainak száma	a sokszög egy oldalának hossza (cm)	a keletkező egyenlő szárú háromszög magassága (cm)	a sokszög területe (cm ²)	a sokszög területének és a sugár négyzetének hányadosa
n	a	m	$T_{\text{sokszög}} = n \cdot T_{\text{háromszög}}$	$\frac{T_{\text{sokszög}}}{r^2}$
3	8,66	2,5	32,48	2,598
4	7,07	3,54	50	2,828
6	5,00	4,33	64,95	3,000
8	3,83	4,55	70,71	3,106
12	2,59	4,83	75	3,108
18	1,74	4,92	76,95	3,126
60	0,52	4,99	78,40	3,140
100	0,31	4,998	78,49	3,141



$$\boxed{T_{\text{szög}} = n \cdot T_{\Delta} = n \cdot \frac{a \cdot m}{2}}$$
$$\underline{T_3} = 3 \cdot T_{\Delta} = 3 \cdot \frac{8,66 \cdot 2,1}{2} = 32,48 \text{ cm}^2$$
$$\underline{T_4} = 4 \cdot T_{\Delta} = 4 \cdot \frac{7,07 \cdot 3,54}{2} = 50 \text{ cm}^2$$
$$\underline{T_6} = 6 \cdot T_{\Delta} = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4,33}{2} = 64,95 \text{ cm}^2$$
$$\underline{T_8} = 8 \cdot T_{\Delta} = 8 \cdot \frac{4,83 \cdot 4,17}{2} = 80,71 \text{ cm}^2$$
$$\underline{T_{12}} = 12 \cdot T_{\Delta} = 12 \cdot \frac{2,59 \cdot 4,73}{2} = 75 \text{ cm}^2$$
$$\underline{T_{18}} = 18 \cdot T_{\Delta} = 18 \cdot \frac{1,74 \cdot 4,92}{2} = 76,95 \text{ cm}^2$$
$$\underline{T_{60}} = 60 \cdot T_{\Delta} = 60 \cdot \frac{0,52 \cdot 4,95}{2} = 78,4 \text{ cm}^2$$
$$\underline{T_{100}} = 10 \cdot T_{\Delta} = 100 \cdot \frac{0,31 \cdot 4,98}{2} = 78,45 \text{ cm}^2$$

3. Határozd meg a BEVEZETŐ-ben szereplő kör alakú terítő kerületét és területét!

Megoldás

A kör sugara $r = 1,5$ m. (A könnyebb számolás kedvéért ne vegyük figyelembe a varrás során keletkező hulladékot!)

A kör kerülete $K = 2 \cdot 1,5 \cdot \pi$ (m) $\approx 9,42$ (m); a kör területe $T = 1,5^2 \cdot \pi$ (m²) $\approx 7,07$ (m²).

A körbeszegéshez 9,42 méter szalag szükséges (de a boltban jobban örülnek, ha 9,5 métert kérünk).

Mivel a kör területére, vagyis a szükséges anyagmennyiségre 7,07 m² adódik, ezért a téglalap alakú 170 cm = 1,7 m széles anyagból $\frac{7,07 \text{ m}^2}{1,7 \text{ m}} \approx 4,16$ m hosszúságút kell vásárolnunk (de a kereskedő szívesebben mér 420 centimétert).

